

Fonctions puissances, exponentielles et hyperboliques

Exercice 1: Résoudre les équations d'inconnues réelles suivantes :

1. $2e^{4x} - 5e^{2x} + 2 = 0$
2. $\text{sh}(x) = 2$
3. $4\text{ch}(x) + 3\text{sh}(x) - 4 = 0$
4. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
5. $\begin{cases} \text{ch}(x) + \text{ch}(y) = 4 \\ \text{sh}(x) + \text{sh}(y) = 1 \end{cases}$

Exercice 2: Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^n = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$.

Exercice 3: Résoudre l'équation d'inconnue complexe suivante : $2^z = i$.

Fonctions logarithmes

Exercice 4:

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$.
2. Résoudre le système d'inconnues réelles x et y : $\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$
3. Résoudre, sur \mathbb{R}_+^* , l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Exercice 5: Etudier en détail la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 6: Pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$, montrer que $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq (1 - \frac{1}{n})^{-n}$.

Fonctions circulaires et circulaires réciproques

Exercice 7: Résoudre les équations ou inéquations suivantes sur \mathbb{R} .

1. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$
2. $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$
3. $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) < 1$
4. $\sin(x) + \cos(x) = 0$
5. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$
6. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 < 0$

Exercice 8: Démontrer les égalités suivantes :

1. $\forall x \in [-1, 1], \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Exercice 9: Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis simplifier leur expression.

1. $f : x \mapsto \cos(2\text{Arccos}(x))$
2. $g : x \mapsto \tan(\text{Arccos}(x))$
3. $h : x \mapsto \cos(\text{Arcsin}(x))$
4. $k : x \mapsto \sin(\text{Arctan}(x))$

Exercice 10: Tracer les courbes des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x))$
2. $g : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x))$
3. $h : x \mapsto \text{Arctan}(\tan(x))$

Exercice 11: Les intervalles de définition et de dérivation sont à préciser.

1. Calculer la dérivée de $h : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right)$.
En déduire une autre expression pour f .
3. En utilisant les dérivées, établir une relation entre les fonctions $x \mapsto \text{Arctan}(e^x)$ et $x \mapsto \text{Arctan}(\text{sh}(x))$.

Exercice 12: Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\text{Arctan}(\sqrt{x})$.